

カオス動学と経済動態分析

小 野 俊 夫

はじめに

マクロ経済やミクロ経済の動態分析のための伝統的な動学モデル、例えば、Samuelson (1939) や Hicks (1950) の乗数-加速度原理による、あるいは Kalecki (1937) や Kaldor (1940) の乗数-利潤原理による景気循環モデル、Goodwin (1951) の非線型加速度因子モデル、また蜘蛛の巣理論による価格変動モデルでは、分析対象の変数の時間的動向は、均衡への単調な収束、循環的収束、永続的循環、あるいは発散（循環的もしくは一方向的な）となりうることが明らかにされた。あるいはまた、Solow (1956) に始まる一連の新古典派マクロ成長モデルでは、均衡成長経路の安定性とそれへの単調な収束が解明された。しかしながら現実の経済動態はこれらの結果と必ずしも一致するとは限らず、経済諸指標の時間経路は以前と似通ってはいるとしても、けっして同じパターンを繰り返すことなく、不規則で予測困難なものとなる。

そのような経済変動の分析モデルとして、古典的な Frisch (1933) の外生的な不規則的衝撃による景気循環モデルがある。近年、Lucas や Sargent らの合理的期待理論派の景気循環モデルでも、本来安定的で均衡経路に収束しうる体系に外部からの不規則的衝撃が加えられるために、現実にもみられるような変動が起りうることが示された。しかしこのように外生的な不規則的衝撃に依存することなく、確定的ないし決定論的 (deterministic) な動学モデルによっても、現実の変動形態に類似

した変数の時間経路を描き出しうるものが、「カオス動学 (chaotic dynamics)」を応用することによって明らかにされるに至った。(現実の前述のような動向は、経済現象に限らず、人口やその他生物の増殖運動、天候や気象の変化、流体の運動など、さまざまな現象に認められる。近年、そのような動向は総称して、「カオス (chaos)」と呼ばれるようになった。)

カオス理論の発展は比較的新しい。1960年代の初めのコンピュータの利用による E. Lorenz, その他の人々による諸研究, 70年代になってからの R. Mayや, T. Li and J. Yorke らの諸研究を経て, さまざまな分野で相互にほぼ独立して進められてきた以前からの諸研究の成果が一挙に集大成されるとともに, さらに多くの研究がなされつつある¹⁾。経済学でのカオス動学の利用はさらに新しく, 80年代になってからであるが, ここでもさまざまな領域での研究が進められている²⁾。

カオス動学モデルの大きな特質は, 確率項をもたない決定論的な同一の非線型方程式体系によって, 変数の多様な時間経路を描き出しうることである。すなわち, 例えば前述の伝統的景気循環モデルや蜘蛛の巣モデルによる変数のさまざまな変動パターンのすべて, さらにカオス的な変動も, 同一の方程式体系のパラメータ (以下で考察するような最も簡単な式の場合には, 1 個のパラメータ) の値の差によって描き出しうるのである。ミクロ分野およびマクロ分野での経済動態分析を進めるに当たって, 今後カオス動学の重要性はますます増大するであろう。以下の I ではまず, 簡単な非線型差分方程式のパラメータの値の差によって, さまざまな形の変動がいかにして起こりうるのかをカオス理論によって明らかにし, ついでカオスが発生するための十分条件 (Li-Yorke の定理) について考察する。そして II では, 経済動態分析へのカオス動学の適用の有用性を考えるために, これまでの代表的な経済動学モデルのいくつ

かをカオス動学的に再構成して分析した諸例を取り上げて考察する。

注

- 1) その事情については、小野 (1994), 付録, pp.59-64参照。
- 2) 文献については、例えば、Day (1983), p.201; Day and Shafer (1985), p. 340; Benhabib (ed.) (1992); Medio (1992); Lorenz (1993); Creedy and Martin (eds.) (1994) など参照。

I カオス動学序説：周期分岐はカオスへの道

カオス現象を生み出しうる動学方程式としては、微分方程式についても差分方程式についてもさまざまな形式のものがある（詳しくは、Tu (1994), pp.197-200, 209-11参照）。微分方程式モデルでは少なくとも3階のものでなければならず、しかも簡単な非線型定差方程式の場合よりずっと面倒な手続きが必要である (Day (1983), p.210)。そこでカオス理論へのほとんどすべての序論では、最も簡単な形式の非線型差分方程式

$$(*1) \quad y_{t+1} = \omega y_t (1 - y_t); \quad \omega > 0$$

が用いられている (Medio (1992), p.153)。なお一般的には、1 期間のラグを伴う簡単な決定論的非線型差分方程式、

$$(*1)' \quad y_{t+1} = f(y_t)$$

が用いられることもあるが、ここでは断りのない限り (*1) について考察していくことにする。

1 均衡点と軌道

(*1) は y_{t+1} が y_t の2次関数であることを示しているから、 y_t を横軸に y_{t+1} を縦軸に測り、非負領域のみを考えれば(後に明かになるように負領域の y_t の均衡点は不安定となるから)、原点 ($y_t = 0, y_{t+1} = 0$) から出て横軸上の点 ($y_t = 1, y_{t+1} = 0$) に至る上方に凸 (一山型) の放物線となる (図1～図4参照)。時間とともに変化する y_t に対応して、次期の y_{t+1} はこの曲線上で決定される。曲線上の点はその運動状態を示すから「状態

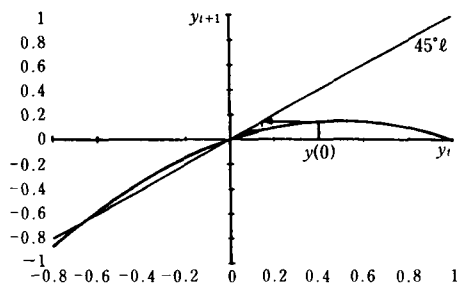
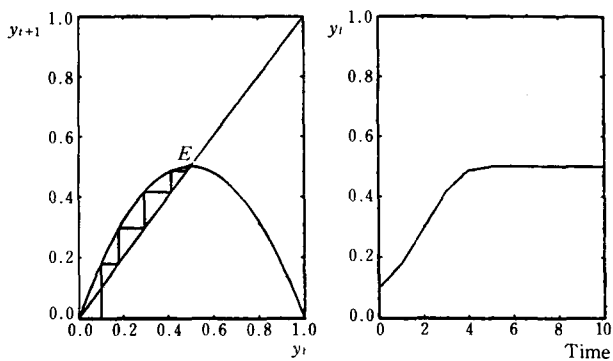
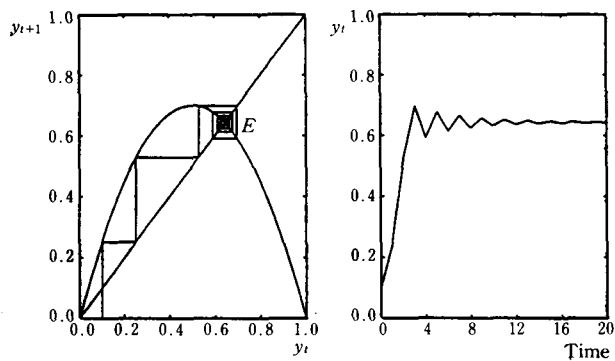


图 1 ($\omega=0.7$)



(a) ($\omega=2.0$)



(b) ($\omega=2.8$)

图 2

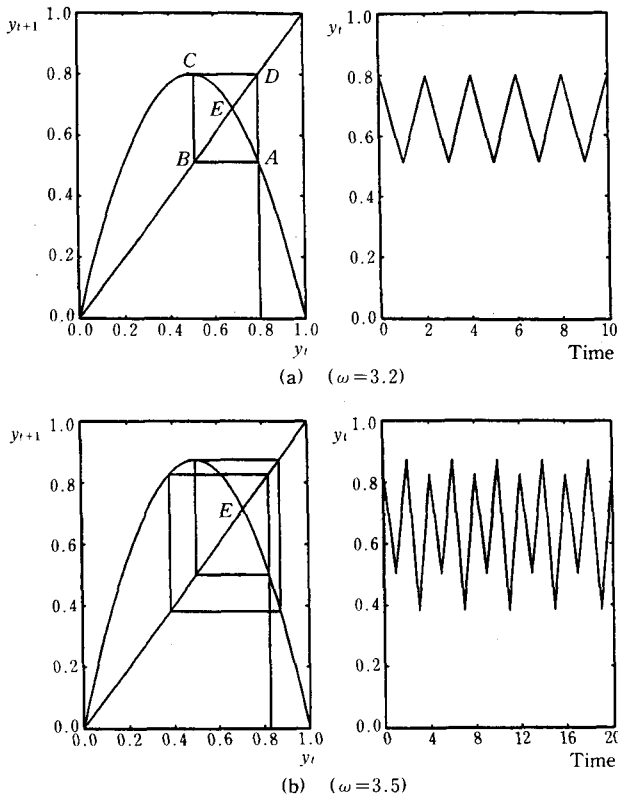


図 3

点」といわれ、このようなグラフは「位相図もしくは相図 (phase diagram)」といわれる。

この曲線は、原点を通る45度線 ($y_{t+1} = y_t$ を示す) と原点の1点で、あるいは原点と他の点との2点で交わるが、それらの交点が均衡点にはならない。すなわち、そこでは $y_{t+1} = y_t = y_e$ (均衡値) が成立している。 y_t が最初から均衡点に存在すれば y_t は変化しない。そこで均衡点は「不動点 (fixed point)」あるいは「定常点 (stationary point)」ともいわれる。いま、均衡点以外の横座標 y_0 から出発するものとする、次期の y_1 は

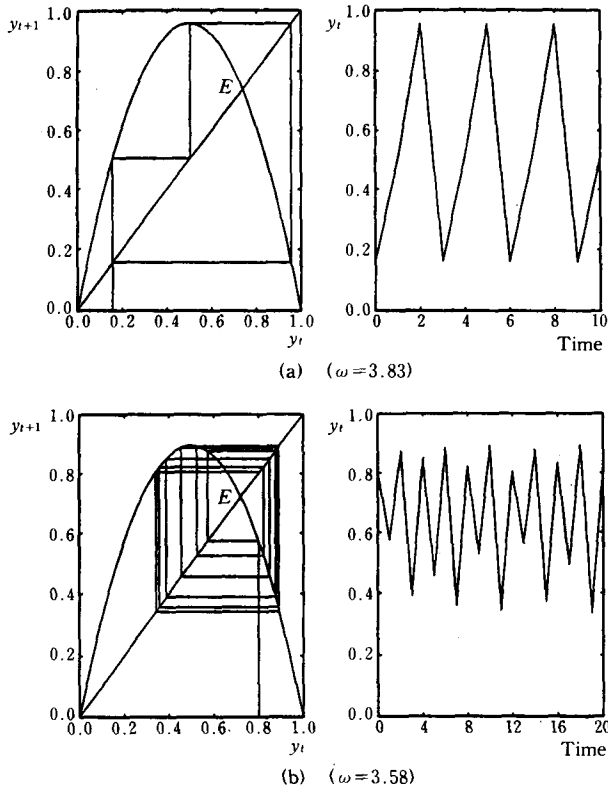


図 4

それに対する曲線上の点の縦座標である。これを横軸に移すには、その点から引いた水平線と45度線の交点の横座標をとればよい。この y_1 から同様に y_2 を求め、 \dots と y_t の時間経路（軌道）を辿ることができる。

次に、均衡点の安定性を考えよう。定常点から少し離れた点から出発して、しだいにその定常点に近づいていくなれば、その定常点は安定である(図1の原点、図2の点 E)。図2における y_t の時間経路は(特に(a)の右側の図にみられるように)、S字を横に引き延ばしたような形状をしているが、これは「ロジスティック (logistic) 曲線」と呼ばれ、その式

(＊１)は「ロジスティック方程式」と呼ばれている。この場合、定常点はその近傍のすべての軌道を引きつけるという意味で、「アトラクター (attractor)」といわれる。アトラクターは必ずしも点であるとは限らない。たとえば四辺形の軌道があって、その内側および外側のどこから出発しても、極限的にその軌道上を運行することになりうるならば、この軌道はアトラクターであり、安定である(図3(a)の四辺形 $ABCD$)。このような軌道は「極限循環 (limit cycle)」あるいは「極限周軌道」といわれる。(これは1920年代にファン・デル・ポール (B. van der Pol) によって、非線型運動方程式により解明されたが、その後、経済理論の分野でも景気循環のモデル分析に応用されている。これについては、Goodwin (1990), Chap. 10, および訳注を参照。)

これとは逆に定常点からしだいに遠ざかっていくならば、その点是不安定である(図2～図4の原点、図3と図4の点 E)。この場合の定常点はその近傍のすべての軌道を跳ね返すという意味で、「リペラー (repellor)」といわれる。また、アトラクターとリペラーの性質を半分ずつ有する定常点あるいは極限周軌道もありうる。それからある方向に少し離れた点から出発するとそれに引きつけられるが、別の方向に離れた点からでは跳ね返されて近づけないような定常点(図1の曲線が原点で 45° 線に接している場合の原点)あるいは極限周軌道がそれである。

以上の図から、定常点が安定か不安定かは、その点における y_{t+1} 曲線の勾配の絶対値に依存していることが分かるであろう。すなわち、その勾配の絶対値が1より小であればその均衡点は安定であるが、1を上回ると不安定になる。ところで、この曲線の形状はパラメータ ω の値のみに依存しているから、均衡点が安定か不安定かは、そしてまた y_t の軌道も、 ω の値に依存することが分かるであろう (y_t の軌道がけっして同じパターンを繰り返すことのないカオス状態になる場合(図4(b)参照)には、軌

道は y_t の初期値にも依存する)。次にこの問題を考えよう。

2 パラメータ ω と均衡の安定性

曲線 y_{t+1} は、非負領域のみを考えれば、原点($y_t = 0, y_{t+1} = 0$)から出て横軸上の点($y_t = 1, y_{t+1} = 0$)に至る一山型の曲線であるが、その形状はパラメータ ω の値のみに依存する(図5参照)。曲線の勾配は、

$$(*2) \quad dy_{t+1}/dy_t = \omega - 2\omega y_t$$

となるから、頂点の座標は、

$$(*3) \quad *y_t = 1/2, \quad *y_{t+1} = \omega/4$$

となる。この横座標は一定であるから、頂点は ω の増加とともに垂直に上昇する。しかし(*1)から分かるように、 y_t のとりうる最高値は1であるから y_{t+1} も同様に1を越えることはない。したがって $\omega/4 \leq 1$ 、すなわち

$$(*4) \quad 0 < \omega \leq 4$$

である。したがって曲線 $f(y_t)$ は区間 $[0, 1]$ 上に存在し、 $0 \leq f(y_t) \leq 1$ となる(すなわち曲線はすべて図5の正方形の中に存在する)。

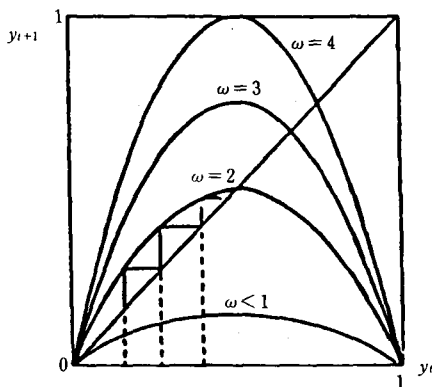


図 5

ここで $y_e = y_{t+1} = y_t$ とおくことにより、均衡値、

$$(*5) \quad y_{e1} = 0 \quad \text{および} \quad y_{e2} = 1 - 1/\omega$$

が得られる。また、それぞれの均衡点における曲線の勾配は、(*2)により y_e の値に応じて、

$$(*6) \quad y_t = y_{e1} = 0 \text{ の場合, } \omega$$

あるいは

$$(*7) \quad y_t = y_{e2} = 1 - 1/\omega \text{ の場合, } 2 - \omega$$

となる。 $\omega \leq 1$ であれば均衡点（非負領域の）は原点のみとなる（図1）が、 ω の上昇につれて原点における勾配は上昇する（図5参照）。 ω が1を越えるとプラスの均衡点が現れ、 y_{e2} の値は ω の上昇につれて増加する。また、そこでの勾配は初めは右上がりであるが、 ω の上昇とともに低下していき、 $\omega = 2$ のとき水平（頂点が均衡点）になる。さらに ω が上昇すると勾配は右下がりになって傾斜は急になっていく。

さて、定常点の安定性の問題であるが、原点の定常点については、(*6)より、 $\omega \leq 1$ であれば安定（図1）、 $\omega > 1$ であれば不安定（図2～図4）である。また、原点と異なる定常点Eについては、(*7)より、 $-1 < 2 - \omega < 1$ 、すなわち $1 < \omega < 3$ であれば安定である（図2の(a)と(b)）。しかし $1 < 2 - \omega$ 、すなわち $\omega < 1$ であるか（この場合の原点と異なる定常点は図1のように負領域に存在する）、あるいは $2 - \omega < -1$ 、すなわち $3 < \omega$ となると不安定である（図3と図4）。（ $\omega = 3$ の場合は均衡点の近傍での中立的循環となる。Goodwin (1990), 訳書(1992), p.18参照。） $1 = 2 - \omega$ 、すなわち $\omega = 1$ の場合には、曲線は原点において45度線に接し、定常点は原点のみになる。そこで負領域ではリペラー、正領域ではアトラクターである。

さて、原点と異なる安定な定常点は負領域には存在しないことが分かったから、正領域の定常点Eと y_t の軌道についてさらに考察することに

しよう。

3 パラメータ ω の上昇と定常値および循環期間：分岐図

ω が大きくなるにつれて、定常点 E は45°線を右上方に移動し、均衡値 y_e は増大する(図5参照)。 $\omega < 3$ のもとでは、所定の ω に対応する y_e は1個で安定であり、最終的にはこの y_e が每期達成されるから1期間の循環(1周期循環)になる(図2)。 ω が3を越えるとそれまでの定常点は不安定になると同時に、2個の定常点が現れてそれらの間を往復する安定な2期間循環が生起する(図3(a))。 ω (< 3.4495)の増加につれて、2個の定常値の大なる方は増大し小なる方は減少して、循環の振幅は拡大する。 ω が3.4495を越えると2期間循環は不安定になると同時に、4個の定常点の間を循環する安定な4期間循環が現れる(図3(b))。さらに ω (< 3.5700)が上昇して4期間循環が不安定になる値(ほぼ3.54)に達すると、安定な8期間循環が生起する。以下同様にして、 ω の上昇につれて 2^{n-1} 期間循環は不安定になると同時に 2^n 循環が現れて、・・・と続いていく。

ω の上昇につれて、安定なそれぞれの定常点 y_e が2個づつに分岐して変化していく状況を、コンピュータに描かせたグラフが図6である。上述のように、 ω の増加につれて、初めは1個である y_e (その値は増大していく)はやがて2個に分岐し、さらにそれぞれ2個づつに分岐して4個になり、そしてまた・・・と分岐していくことが分かる。そこでこのような図は「分岐図 (bifurcation diagram)」と呼ばれる。Medio (1992, p.168, Fig. 9.6) によって描かれた図は、さらにその後の事情も分かり易く示している(図7)。なお、安定な定常点に分岐して不安定となった元の定常点もなお存在しているが、分岐図には描かれていない。

さて、 ω が3.5700を越えると不動点の個数は無限になり、偶数期間の循環が無数に存在する「カオス領域 (region of chaos)」に突入する。一定の ω のもとで生起する y_t の時間経路はけっして同じパターンを繰り返

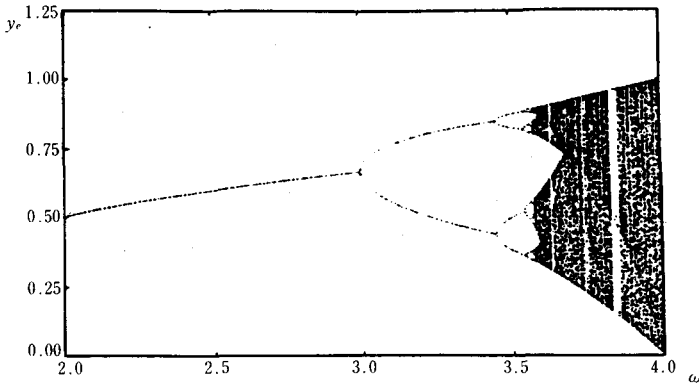


図 6

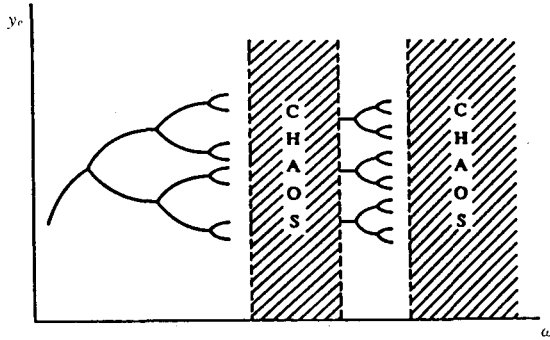


図 7

さず、またそれぞれ異なる軌道を生み出す y_t の初期値は無数に存在する。したがって、同一の ω のもとで生み出される軌道も、 y_t の初期値の僅かな差に対して極めて敏感に反応して変化する。

ω が 3.6786 になると、無数の偶数期間循環の併存するカオスの中に、最初の大きな奇数期間の循環が現れる。 ω の増加につれて奇数循環の周期は減少（逆分岐）していき、 $\omega = 3.8284$ において「窓 (window)」が開く（窓について詳しくは、長島・馬場(1992), pp.61-2 参照）。そして遂に安定した 3 期間循環が現れる（分岐図および図 4(a) 参照）。しばらくは ω が増

加してもその状態が続くが、やがてウィンドウ内で分岐が進み、奇数期間の循環が順次生起していき、偶数・奇数のあらゆる期間の循環が併存することになる。このことはまず Sarkovskii (1964) によって発見されたとされているが、その後 Li & Yorke (1975) によってカオス発生の十分条件として定式化された（これについては後述）。

以上のように、 ω が3を越えて増加していくにつれて現れる、均衡点と周期の分岐を経てカオス領域に入っていくことになる。カオスへの道を辿る初めの段階では、2期間循環が 2^n ($n=2, 3, \dots$) 期間循環へと倍周期分岐を繰り返していくが、分岐 2^n を生起させる ω の値とその次の分岐 2^{n+1} を生起させる ω の値とは、分岐の進行につれてますます接近していく。分岐 2^n とその前後の分岐 (2^{n-1} および 2^{n+1}) を生起させる ω の値を、それぞれ ω_n , ω_{n-1} , ω_{n+1} とし、

$$(* 8) \quad \delta = (\omega_n - \omega_{n-1}) / (\omega_{n+1} - \omega_n)$$

とすると、この比率 δ について興味ある結果が Feigenbaum (1978) によって示された。すなわち、 ω_n の値が大きくなるにつれて、 δ は一定値4.669201609に近づくことが、放物線状のあらゆる非線形体系について普遍的にみられることが示された。このことはその後、Lanford (1982) によって証明されたが、円周率 π や自然対数の底 e のように普遍的な定数であるこの数値は、「ファイゲンバウム数 (Feigenbaum number)」と呼ばれる（これについて、より詳しくは長島・馬場(1992), pp.51-4参照）。

近似的には $\delta=4.6692$ として、これは任意の n について成立するとされている (Creedy & Martin, p.17)。これを利用すれば、 ω_{n-1} と ω_n が知られている場合に、次の分岐を引き起こす ω_{n+1} の値は(* 8)を利用して求められる。

4 パラメータ ω の上昇と周期分岐の分析

パラメータ ω の上昇につれて、上述のような分岐がいかにして起こり、

カオスの事態に至るのであろうか。まず、いかにして1つの安定な定常点が不安定になり、2つの定常点が現れて安定な2期間循環が始まるのかを明らかにすることから始めよう。 $2^n (n=2,3,\dots)$ と続く倍周期分岐はその類推から分かるであろう。ついで3期間循環の発生について明らかにし、カオスへの道を辿ることにしよう。

さて、1個の安定均衡点(アトラクター)の場合には $y_{t+1}=y_t=y_e$ であるが、アトラクターが2期間循環の場合には $y_t=y_{t+2}$, $y_{t+1}=y_{t+3}$ となる。したがって2期間循環の発生を考えるためには、 y_{t+2} と y_t の関係を考えねばならない。同様に3期間循環を考えるためには、 y_{t+3} と y_t の関係を考えねばならない。 y_{t+1} は y_t によって $y_{t+1}=f(y_t)$ として決定される。 y_t と $f(y_t)$ の対応関係が関数であるが、 $f(y_t)$ は y_t の「写像(map)」ともいわれる。また y_{t+2} は $f(y_{t+1})$ として、 y_{t+1} は $f(y_t)$ として決定されるから、 y_{t+2} は $f(y_t)$ を2回反復する関係 $y_{t+2}=f(f(y_t))$ として示され、これを $f^2(y_t)$ と書き、 f を2回反復する写像という。同様にして、 $y_{t+3}=f^3(y_t)$ と表せ、これは f を3回反復する写像である。一般に y_t と y_{t+n} の関数関係は、 f を n (≥ 1)回反復する写像 $f^n(y_t)=f(f^{n-1}(y_t))$ として定義される。

では、 ω の上昇と2周期分岐の関係の考察に進もう。(なお、以下に関してはBaumol and Benhabib (1989), pp.87-93; Ahmad (1991), 361-5参照。)

(1) 安定均衡点から2期間循環へ

y_{t+2} と y_t の関係をグラフ(位相図)に示すためには、縦軸に y_{t+2} を測らねばならない。図8には、これまでの $f(y_t)$ のグラフ上に重ねて $f^2(y_t)$ のグラフが描かれている。これら2本の曲線の関係について、まず3点が指摘される。

- (i) 2曲線とも横軸と同一の2点、 $y_t=0$ と $y_t=1$ で交わる。 $y^*=f(y_t)=0$ の根とすれば、 $f(y^*)=0$ であるから $f^2(y^*)=f(f(y^*))=f(0)=0$

となるからである。

(ii) 2 曲線とも 45° 線と同一の点 E で交わるから、 $f(y_t)$ と $f^2(y_t)$ の均衡点 E は一致する。 y_e を f の均衡点とすると $f(y_e) = y_e$ であり、 $f^2(y_e) = f(f(y_e)) = f(y_e) = y_e$ となるからである。

(iii) f の均衡点 E における f^2 の勾配は f の勾配の 2 乗に等しく、 $y_e = y_t = y_{t+1}$ において $d(f^2(y_t))/dy_t = (df(y_t)/dy_t)^2$ となる。左辺 $= (dy_{t+2}/dy_{t+1})(dy_{t+1}/dy_t)$ であるが、 $y_e = y_t = y_{t+1}$ において $dy_{t+1}/dy_t = dy_{t+2}/dy_{t+1} = df(y_t)/dy_t$ となるからである。(なお、このことは $y_{t+1} = y_t = 0$ となる原点においても成立する。)

以上の 3 点は、 n を任意の整数とする $f^n(y_t)$ についても成立する。2 つの曲線の関係に関する次の点は、特に f が (* 1) の一山型の曲線の場合について成立する。

(iv) $f(y_t)$ は y_t の 2 次関数で 1 つの頂点を有するが、 $f^2(y_t)$ は y_t の 4 次関数で 2 つの頂点とそれらの間に 1 つの谷を有する (図 8)。

ω の増加につれて f の頂点は上昇し、図にみられるように f^2 の頂点も上昇するが、谷は深くなる。 ω が十分に大きければ f^2 は 45° 線と原点も含めて 4 点で交わる (図の (b))。 $y_{t+2} = f^2(y_t)$ の均衡値を $y_{t+2} = y_t = y_{e2}$ とすると、 $y_{e2} = f^2(y_{e2})$ となり 4 個の y_{e2} が存在する。 ω が十分に大きければこれらはすべて実根であるが、そうでなければ (図の (a))、 f^2 は 45° 線と原点と他の 1 点 E でしか交わらず、2 個の y_{e2} は虚根となる。

以上の予備的考察に基づいて、 ω の上昇につれてなぜ 1 つの安定な定常点 E が不安定になり、2 つの定常点 E_1 および E_2 が現れて安定な 2 期間循環が始まるのか、という当面の問題の解明に進むことができる。さて、(* 1) の定常点 E (45° 線との交点) における勾配は $(2 - \omega)$ であるから、上記 (iii) により f^2 の勾配は $(df/dy_t)^2 = (2 - \omega)^2$ となる。

$2 < \omega < 3$ の場合 (図の (a))、均衡点 E は安定であり、そこでは $0 < f^2$ の勾

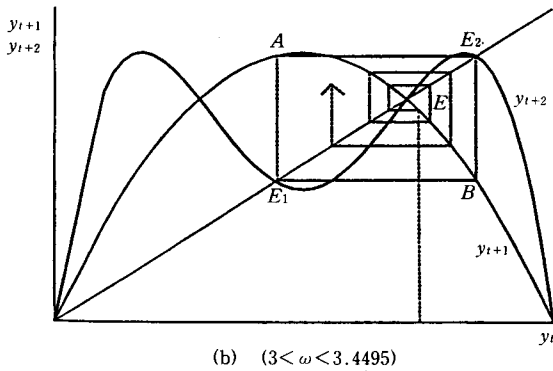
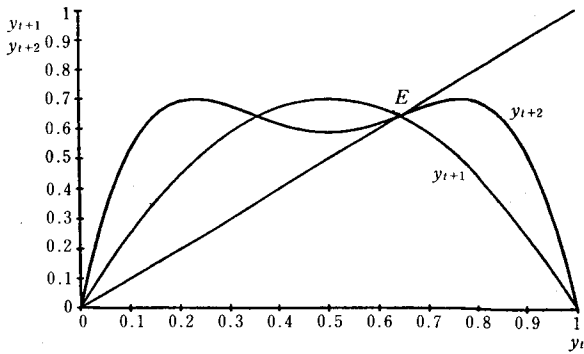


図 8

配 <1 である。 $\omega=3$ の場合には、点 E における f の勾配 $=-1$ 、 f^2 の勾配 $=(-1)^2=1$ となる。

そして $3 < \omega$ になると、点 E における f の勾配 <-1 となり均衡点は不安定（リペラー）となる（図の（b））。そこでの f^2 の勾配 $=(2-\omega)^2>1$ となり、その近傍で曲線 $f^2(y_t)$ は45°線を下側からよぎることになる。したがって曲線 f^2 は、 y_t が0から増加していくにつれて上昇していくが、最初の頂点に達してから下降し、点 E の左側の点 E_1 において45°線と交わってから谷に達する。そして再び上昇して点 E を下側から通過してから、第

2の頂点に至り、再び下降して点 E の右側の点 E_2 において45°線をよぎって、横軸の1に達することになる。

これから知られるように、均衡点 E における $f(y_t)$ の勾配 <-1 にならしめる ω の値(>3)に達すると、均衡点 E は不安定になると同時に、 $f^2(y_t)$ と45°線との2つの新しい交点(E_1 および E_2)が現れて、これらがこの場合の2つの安定均衡点になる。そして y_t がこれらの2点の間を循環する2期間循環が生起することになる。これが「分岐(bifurcation)」といわれる現象である。均衡点 E_1 および E_2 における f^2 の勾配は負で、その絶対値は1より小であるから、この循環はアトラクターである。最終的な軌道は y の初期条件に依存せず、極限循環 E_1AE_2B になる。図3(a)にはこのような2期間循環が描かれている。

この循環の位置と規模(振幅)は、 $f^2(y_t)$ と45°線との2つの交点によって決定されるから、結局は ω に依存する。 $\omega>3$ が3に極めて近い場合には点 E_1 と E_2 は近接しているが、 ω が大きくなるにつれてそれらは離れていくとともに、それぞれの点における $f^2(y_t)$ の勾配の絶対値は増加していく。

(2) 2期間循環から4期間循環へ、そして2ⁿ期間循環へ

ω が3.4495を越えると2つの均衡点 E_1 および E_2 における $f^2(y_t)$ の勾配 <-1 となり、それらの2点と2期間循環は不安定になる。これはちょうど、点 E における $f(y_t)$ の勾配 <-1 となったとき、 $f^2(y_t)$ が45°線と点 E の他の2点(E_1 および E_2)でも交わるようになって点 E が不安定になり、代わって2つの安定な均衡点 E_1 と E_2 に分岐したのと同様の事態である。 ω が3.4495を上回ると、 $f^4(y_t)$ が点 E_1 と E_2 のそれぞれの前後でも45°線と交差するようになり、点 E_1 と E_2 は不安定になってそれぞれ2個ずつの安定点に分岐する。こうして、それぞれ2つの安定点の間の2期間循環を包摂する形で、安定な4期間循環(極限循環)が生起することにな

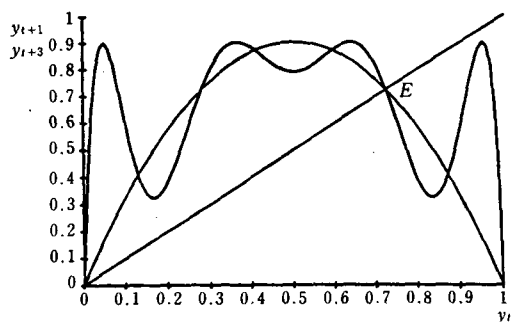
る(図3(b)参照)。さらに ω が大きくなるにつれて同様の分岐が進行して、8期間、16期間、・・・と、 2^n 期間循環が順次現れてくる。それぞれの循環には、期間のより短い 2^{n-1} 、 2^{n-2} 、・・・、2期間循環が包摂されている(Ahmad (1991), p.365; Baumol and Benhabib (1989), p.90)。

(3) 3期間循環とカオス

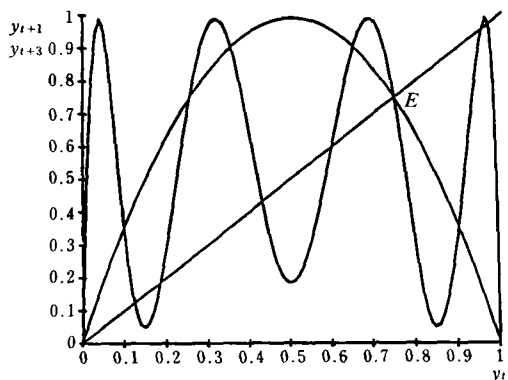
ω が3.5700を上回ると定常点は無限個になり、偶数期間の循環が無数に存在するカオス領域に入るが、 ω が3.6786になると、その中に最初の大きな奇数期間の循環が現れる。 ω の増加につれてその周期は減少(逆分岐)していき、 $\omega=3.8284$ において「窓」が開き、遂に安定した3期間循環が現れる。ここもカオス領域内にあるが、ここでは偶数・奇数のあらゆる期間の循環を含むカオス現象が生起している。それらはコンピュータによるシュミレーションによって描き出すことができない「観測不可能なカオス」(長島・馬場(1992), pp.26-7, 61参照)である(図6および図7参照)。

では、3期間循環はいかにして現れるのであろうか。この問題を解くには、これまでと同様に、曲線 $y_{t+3}=f^3(y_t)$ 、つまり y_t と写像 $f^3(y_t)$ を考えればよい。 $f(y_t)$ は y_t の2次関数であるから、 $f^3(y_t)$ は y_t の8次関数である。これは原点から上昇して7つの山と谷を経て横軸の1に至る曲線であり、したがって $f^3(y_t)$ は四山型の曲線になる。図9(a)では ω がそれほど大きくないために、 $f^3(y_t)$ は $f(y_t)$ の非負の安定な均衡点 E において45°線と交わるのみである。 ω の増加とともに $f^3(y_t)$ の4つの頂点は上昇し、3つの谷は下降していき、やがて図9(b)のように45°線と7回交わるようになる(原点は除いて)。交点 E 以外の6つの交点によって、2つの3期間循環が生み出されるが、その1つはアトラクターであり他はリペラーである。

こうして $\omega=3.8284$ において安定した3期間循環(図4(a)参照)が



(a)



(b)

図9

現れてくるが、不安定な3期間循環もその他無数のカオス軌道とともに併存している。コンピュータによって描き出されうるのは前者のみであるが、3期間循環の出現は、偶数・奇数のあらゆる周期の循環を含むカオスの発生を示しているのである。 ω の増加につれて、奇数期間の循環は安定なものとは不安定なものが一対をなして現れては、消滅していく (Baumol and Benhabib (1989), p.91, また詳しくは長島・馬場, pp.61-8参照)。

5 カオスの性格

カオスの性格は次の4点に要約される (Day (1983), p.202)。すなわち、
 (1) あらゆる周期の循環が存在する。(2) まったく周期性を有しない多様なカオス軌道の入り交じった集合が存在し、この集合に属する軌道は、いずれも相互に収束することはない、離れては近づき、近づいては離れることを無限に繰り返す。(3) いずれのカオス軌道も非周期的であり、いかなる周軌道にも収束しない。(4) カオス軌道は高度に不安定であり、見かけは高度に確率的で不規則に、まったく予測不可能であるかのように変動する。

以上のような性格を有するカオス現象は、確率項をもたない決定論的な簡単な非線型差分方程式 (* 1) によって生み出されてくる。その軌道は一定の区間 $[0, 1]$ 上に留まっており (図5の正方形の中に閉じ込められており)、それから逸脱することはない、あたかもアトラクターが存在しているかのように思われる。そこでカオス軌道は「ストレンジ・アトラクター (strange attractor)」といわれる。

y_t の時間経路がパラメータ ω の値に依存して変化しうるのは、これまでの考察から明らかである。 ω の値が有限期間の極限循環を生起させ

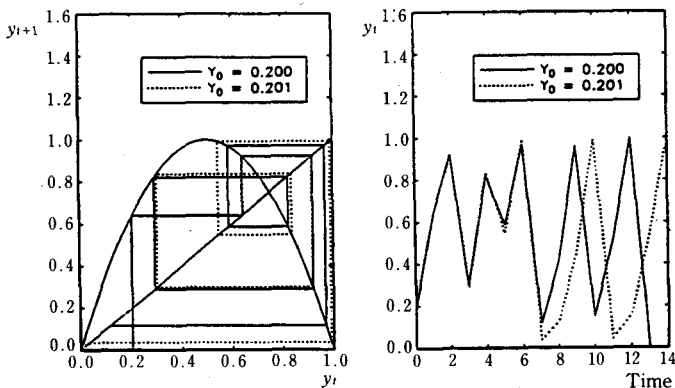


図10

るようなものであれば、 y_t の初期値がどのようなものであれ、最終的には y_t は同一の極限循環を示すことになる。しかしすでに指摘したように、カオス領域では無数の不動点と循環が存在し、 ω は一定でも、 y_t の軌道は初期値の僅かな差に対して極めて敏感に反応して変化する。図10 (Creedy and Martin (1994), p.15, Fig.2.5) にみられるように、 y_t の初期値 (0.200と0.201)が僅かに異なるだけで、 y_t の時間経路は初めのうちは大差ないが、しばらくすると大きく異なってくるのである。このことは、 y_t の動向の予測の信頼性が、初期条件に関する情報の精度に大きく依存することを意味している。そしてまた、予測期間が長期化するほど信頼性が薄れることを示唆している。

このようなカオスが生起するのはいかなる条件のもとにおいてであろうか。次にこの問題に進もう。

6 カオスの十分条件：リー＝ヨークの定理

ここでは、これまで用いてきた最も簡単な決定論的非線型差分方程式、

$$(*1) \quad y_{t+1} = \omega y_t (1 - y_t)$$

に代えて、ラグは1期間であるが、より一般的な非線型差分方程式、

$$(*1)' \quad y_{t+1} = f(y_t)$$

を考え、これによって決定される y_t の軌道がカオス形態になるのは、いかなる条件のもとであるかをみる (例えば、Creedy and Martin (1994), p.17参照)。

すでにみたように、パラメータがある値((*1)の場合は $\omega = 3.8284$)に達すると3期間循環が現れるが、これは偶数・奇数のあらゆる周期の循環も併存するカオスの生起を意味する。したがって、カオス理論にとって3期間循環を識別することは特に重要である。Li and Yorkeは、上記の関数 f が3期間循環を生み出すならばカオスを生起させることを証明した。この結果が、“Period three implies chaos”という象徴的な

題名の論文 (Li and Yorke (1975)) として公刊された (リー=ヨークの定理に関連する詳しい考察は長島・馬場(1992), 2章, 山口 (1986), pp.95-104を参照されたい)。

では, カオス発生の十分条件を示したリー=ヨークの定理についてみよう。まず, 一般的な形で, ついでグラフによってみる。さて, 区間 $J = [0, y^u]$ 上で連続な関数 $f(y)$ について, この区間 J のいずれの $y (0 \leq y \leq y^u)$ についても, 求められる $f(y)$ がこの区間上に存在するならば, f は区間 J 上で「閉じている (closed)」といわれる。(すでにみたように, 一山型の関数 (* 1) は区間 $[0, 1]$ 上で連続かつ閉じた関数である。) この区間の y の初期値 y_0 からの軌道が, 2 期間循環であれば $y_0 = f^2(y_0)$ となり, 3 期間循環であれば $y_0 = f^3(y_0)$ となる。そこで定理は次のように述べられる (Day and Shafer (1985), pp.341-2; Day (1993), p.203)。

定理 (Li-Yorke) : 関数 f は区間 $J = [0, y^u]$ 上で連続かつ閉じており, この区間 J の y^f について

$$(LY1a) \quad f^3(y^f) \leq y^f < f(y^f) < f^2(y^f), \text{ あるいは}$$

$$(LY1b) \quad f^3(y^f) \geq y^f > f(y^f) > f^2(y^f)$$

が成立するならば,

- (i) あらゆる周期の循環が J 上に存在する, すなわち, $y = f^n(y)$ をあらゆる自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して満足する n 個の異なる周期解 y が存在する (周期解 y とは, y を f によって n 回反復すると最初の y に戻るような y , すなわち $y = f^n(y)$ を満足する y である), そしてまた,
- (ii) f は区間 J 上でカオス状態になる。

ここで (LY1a) あるいは (LY1b) の広義の不等号を等号にした,

$$(LY2a) \quad f^3(y^f) = y^f < f(y^f) < f^2(y^f), \text{ あるいは}$$

$$(LY2b) \quad f^3(y^f) = y^f > f(y^f) > f^2(y^f)$$

を満足する y^f が区間 J に存在するならば, この y^f は 3 周期解であり,

リー＝ヨークの定理はカオスが生じるための十分条件を示すものである。すでにみたように、簡単な(*1)の場合には $\omega=3.5700$ のもつてカオスが現れている。しかしながらこの定理が成立するのは、 $\omega>3.8284$ についてのみである (Ahmad (1991), p.369, n8)。また他の十分条件も諸学者によって与えられているが (文献はDay & Shafer (1985), p.342 参照)、当面問題とされるような経済分析のためには、この定理の方が理解し易く便利である。以下ではこれに従うことにしよう。

Figure 1 consists of two graphs, (a) and (b), illustrating the cobweb model. Both graphs have a vertical axis labeled y_{t+1} and a horizontal axis labeled y_t . A 45-degree line, labeled $45^\circ \ell$, is drawn from the origin. A concave curve, labeled $f(y_t)$, represents the production function. The intersection of the curve and the 45-degree line is the steady state, labeled M and y^* .

Graph (a) shows the cobweb process converging to the steady state y^* from an initial value y^f . The sequence of values y^f, y^c, y^*, y^m is marked on the horizontal axis. The cobweb process starts at y^f , moves vertically to the curve, then horizontally to the 45-degree line, and so on, converging to y^* .

Graph (b) shows the cobweb process diverging from the steady state y^* towards y^m . The sequence of values y^c, y^f, y^*, y^m is marked on the horizontal axis. The cobweb process starts at y^c , moves vertically to the curve, then horizontally to the 45-degree line, and so on, diverging from y^* towards y^m .

60

$$(*9) \quad y^c = f(y^m) = f[f(y^*)] = f^2(y^*)$$

となる。 y^* から45°線と曲線を経て後戻りすれば、 $y^* = f(y^c)$ であることがわかる。これを前式に代入すれば、

$$(*10) \quad y^c = f^2[f(y^c)] = f^3(y^c)$$

が得られる。ここでの関連で、定理の第1式 (LY1a) を再掲すれば、

$$(LY1a)' \quad y^c = f^3(y^c) \leq y^f < f(y^f) < f^2(y^f)$$

であるが、図については、これは

$$(LY1a)'' \quad y^c \leq y^f < y^* < y^m$$

となる。

見られるように、図の (a) では上式の y^f の右側の条件は満たされているが、 y^f の左側の条件は満たされていないから、リー＝ヨークの定理からはカオスになるとはいえない。しかし図の (b) では上式が成立するから、事態はカオスの発生である。

カオスの十分条件としてのリー＝ヨークの定理を経済動態分析のモデルに適用するには、図の (b) に示されているような3周期点 y^f 、あるいは (LY1a) もしくは (LY1b) を満足する y^f を検出しさえすればよい。いいかえれば、モデルのパラメータの値が、そのような y^f の存在を可能ならしめるものかどうかを検討すればよい (Day (1983), p.203)。では次に、経済動態分析へのカオス動学の適用例のいくつかを取り上げて考察することにしよう。

II カオス動学の経済動態分析への適用

ここでは、これまでの代表的な経済動態分析モデルへのカオス動学の適用例を考察する。対象とされるモデルは、古典派の人口と経済の長期動態モデル、新古典派の経済成長モデル、およびケインズ派の実質国民所得の動態モデルである。それらがカオス動学的に再構成されて、分析

対象の諸変数の時間経路（軌道）がいかなるものとなりうるか、またリー＝ヨークの定理の適用により、いかなる状況のもとでカオス的動態が起こりうるかが解明されることになる。これらの研究の考察を通して、経済動態分析にカオス動学を適用することの有用性が理解されるであろう。

それらの研究の考察に進むに先立って、経済主体の行動や経済構造に関するパラメータの上昇による、軌道の周期分岐からカオスに至る道程をまず例証するために、現実的ではないが簡単な株式価格の動態モデル（Peters (1991)；訳書（1994）, Ch. 1, pp.8-11）を考察することから始めよう。

1 簡単な株式価格決定モデルによる例証

時点 t の株価を P_t とし、 P は1単位価格（ドル、ポンド、ドリームなど何でも可）未満で推移しているとされる。株式市場には、この株式の取引に加わる多数の買い手と売り手があり、買い手は次期の株価を一定割合 a で上昇させる力を持ち、売り手の圧力がなければ、 $P_{t+1}=aP_t$ となりうる。これに対して売り手は、 aP_t^2 だけ株価を引き下げる力を有するものとする、結局、

$$\begin{aligned}(1.1) \quad P_{t+1} &= aP_t - aP_t^2 \\ &= aP_t(1 - P_t)\end{aligned}$$

が成立する。（これは形式的には（*1）と同一であるから、以上のカオス理論がそのまま適用可能である。ここでは図7の周期分岐図参照。）

さて、買い圧力が低くて a が小さいと、時間経過とともに株価はゼロに向かう（図1の状況）。買い圧力が多少高くなって a がやや大きくなると、株価は1つの適正価格に収束して、安定した状態が達成される（図2の状況）。（ $a=2$ で $P_0=0.3$ の場合、最終的に到達する適正価格は0.50にな

る。)そして a の上昇につれて、適正価格は上昇する。 a が3を越えると、適正価格が1つの状態は不安定になると同時に、2つの適正価格が成立して、株価はそれらの間を変動する安定的な2周期循環となる(図3(a)の状況)。このようなことが起こるのは、売り買いの圧力が均衡せず、高い適正価格のもとでは買い圧力(aP_t)より売り圧力($-aP_t^2$)の方が強くなって株価を引き下げ、低い適正価格に達すると両者の力関係が逆転して、株価を押し上げるからである。一方は売り手の売値、他方は買い手の買値という、2つの適正価格が存在するのである。

そして a の上昇につれて、前者は低下し後者は上昇する。さらに a が上昇すると2周期循環は不安定になると同時に、売り手と買い手の適正価格はそれぞれ2つずつになり、合計4つの適正価格が成立して、株価はそれらの間を変動する安定的な4周期循環が現れる(図3(b)の状況)。 a の上昇とともに、適正価格の個数と安定的循環の周期はさらに 2^3 , 2^4 , 2^5 , ...と増加していく。

a が3.57を越えると市場はカオス領域に突入し、無限個の適正価格が成立可能となるため、適正価格がいかなるものであるかについて市場は一致点を見い出せずに混乱し、株価はみかけはランダムに無秩序であるかのように変動する。しかしさらに a が大きくなって $a=3.8284$ になると、この領域にウィンドウが開いて3つの適正価格が見い出され、安定的な3周期循環が現れる(図4(a)の状況)。そして a の上昇につれて、適正価格の個数と安定的循環の周期は増加していき、市場は再びカオス状態となる。ここでは偶数・奇数のあらゆる周期的かつ非周期的循環が混在し、株価はきわめて不規則に、まったく予測不可能な形で変動する。

以上のように、株式投資家たちの行動パラメータ a の差によって、株価は実にさまざまな動きをすることが分かる。特にカオス領域における値動きは、 a は一定でも、株式取引の初値(初期条件)の微妙な差によっ

て以後の動向は大きく影響されることになる。ここで取り上げたモデルは、買い手による次期の株価上昇への圧力に対して売り手の圧力が受動的に直接関連づけられている、というような点では非現実的である。しかしこのように簡単な非線型モデルでも、現実の株式市場にみられるような複雑な株式の値動きを示しうることを知ることは有意義である。蜘蛛の巣モデルとカオスについてより詳しくは、また、Homes(1991), Chap. 1を参照されたい。さらに例えば、市場交換モデルについては Creedy and Martin (eds.) (1994), Chap. 12, 為替レート変動モデルについては Chap. 6, そして A. Cournot 型複占モデルについては Puu (1993), Chap. 7 など、ミクロ経済学のさまざまな分野においてカオス動学分析がなされている。

2 古典派の内生的人口・経済成長モデル

ここでは T.R. Malthus の古典的な『人口論』に基づく、生活資糧の生産と人口増加の動態モデルへのカオス動学の適用を考察する。さらに D. Ricardo とも関連する古典派の経済発展分析の先駆的なモデル化は、Samuelson (1948, pp.296-8) や Baumol (1970, pp. 266-8) によってなされた (古典派の分析は Baumol によって「宏大な動学 (magnificent dynamics)」と名付けられて高く評価されている)。ここではそれをカオス理論の適用が可能なように再構成した Day (1983) のモデルと、これを多少修正した Ahmad (1991, pp. 371-5) に従って、古典派の人口・経済成長の動態分析へのカオス理論の適用例を考察することにする。

内生的人口成長をも含む古典派成長理論は、最も単純化された形では、(1) 労働 (人口) による生産物を示す生産関数、(2) 実質所得の決定式、および (3) 純人口増加率 (出生率 - 死亡率) と実質所得 (生活資糧) との関係式、から構成される。労働人口は総人口 P の一定割合であるとする

と、総生産 Q は生産関数

$$(2.1) \quad Q = Q(P)$$

によって決定される。これは、 $Q(0) = 0$ であり、 Q は連続的に変化し、労働の限界生産力は逓減し、ある大きさの P のもとでマイナスとなる「一山型」である、と想定される。 Q は生存維持のために等しく配分されるとすれば、1人当たり実質所得（生活資糧） w は

$$(2.2) \quad w = Q(P) / P$$

となる。

人口の純増加率には2つの可能な率があり、1つは生活資料が豊富に存在する場合の最大可能な生物学的ないし自然的な率 λ であり、他は、生活資料が乏しい場合に1人当たりの生存維持水準 σ を保持しうる限りの生存維持的な率 μ であるが、実際の増加率は低い方の率になる、とされる。すなわち人口の純増加率は $w > \sigma$ であれば λ となり、1世代後の人口は $P_{t+1} = (1 + \lambda) P_t$ となる。ここで1単位期間は1世代（25年）とされている（Day (1983), p. 205）。また、 $w < \sigma$ であれば μ となり、1世代後の扶養可能人口は $P_{t+1} = (1 + \mu) P_t$ となる。あるいは(2.2)より $wP = Q(P)$ であるから、 $P_{t+1} = Q(P_t) / \sigma$ と表すこともできる。要約すれば

$$(2.3a) \quad P_{t+1} = (1 + \lambda) P_t \quad \text{for } w > \sigma$$

$$(2.3b) \quad P_{t+1} = \phi(P_t) = Q(P_t) / \sigma \quad \text{for } w < \sigma$$

である。こうして、以下の分析の基本となる人口決定関数、

$$(2.4) \quad P_{t+1} = \theta(P_t) = \min[(1 + \lambda) P_t, Q(P_t) / \sigma]$$

が得られる。

これは2つの部分からなる屈折したグラフ（Day (1983), p.204, Fig.1）となるが、連続的で一山型のものである（図12参照）。図の45°線の左側の半直線は(2.3a)を示し、曲線は(2.3b)を示している。 P_t の実際の軌道は両者のうち低い方によって制約される。自然増加率 λ が十分に大で

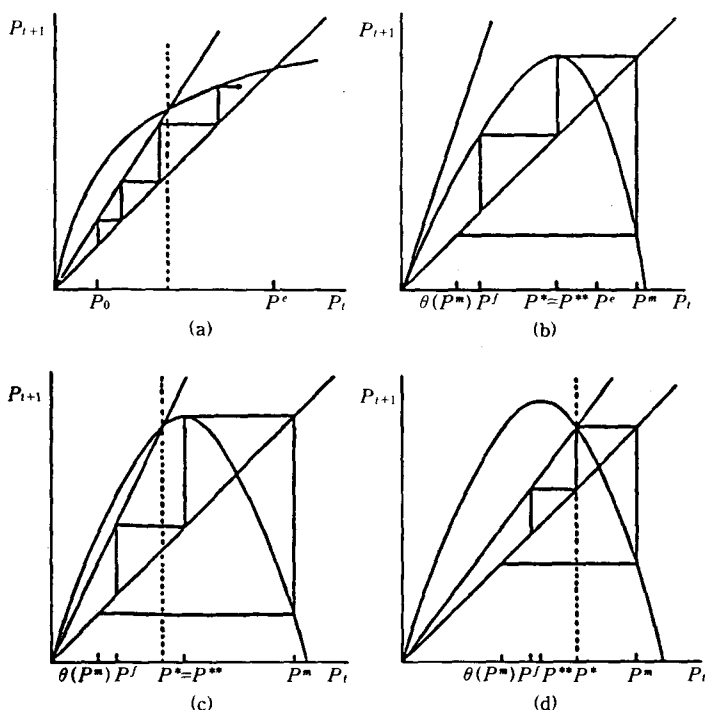


図12

初期人口がある程度大きければ、図の (b) のように、人口はもっぱら生活資料に制約され、曲線 (2.3b) と45°線によって決定される軌道を進むことになる。しかし λ が適度な大きさのものであり、半直線 (2.3a) が曲線 (2.3b) と意味ある領域で交わるならば、 P_{t+1} は交点の左側では半直線 (2.3a) に従い、右側では曲線 (2.3b) に従うことになる。

このように2つの制約条件が交互に有効となる状況のもとでは、経済の歴史は2つの局面によって支配される。第1は人口増加が自然率 λ によって制約される「生物的局面 (biological phase)」であり、第2はそれが生存維持手段の制約を受けて、生存維持的な率 μ でしか増加しえな

い「生存維持局面 (subsistence phase)」である (Day (1983, p.205)。図の(a)では、しばらくの間、生物的局面における単調な増加が続くが、やがて生存維持局面に入って、最終的には定常人口に達する。ここではその人口のもとで生産される1人当たり生産が、まさに1人当たりの生存水準に一致している。図の(b)では、事態はもっぱら生存維持局面で推移する。図の(c)と(d)では、人口のオーバーシュートが起り、過度の人口増加による飢餓の時代と、生活資糧に余裕の生じる豊饒な時代とを交互に繰り返しつつ変動することになる。

さて、図12の(b), (c), (d)のような場合に、カオスの事態に至るのかどうか、すなわちリー=ヨークの条件が成立するのかどうかは、図11と比較することによって確かめられるであろう。

θ は一山型であるから達成可能な最大の P^m が存在し、それに導く P を $P^*(< P^m)$ とすれば、

$$(2.5) \quad P^m = \theta(P^*) = \min[(1+\lambda) P^*, Q(P^*)/\sigma] \\ = \max_{P \geq 0} \min[(1+\lambda) P, Q(P)/\sigma]$$

である。また、 $\theta(P) = P^*$ の最小根を P^f とすると、リー=ヨークのカオス定理(LY1a)が満たされるのは、

$$(2.6) \quad 0 < \theta(P^m) \leq P^f < P^* < P^m$$

が成立する場合である。

この式の第2の不等式は

$$(2.7) \quad Q(P^m) \leq \sigma P^f$$

を意味しているが、これは生産量が人口 P^f を生存維持水準のもとで扶養するのに必要な量以下であることを示している。もしもこのような事態になれば、カオスとなるのである。

ところで、(2.4)の性格から2つの局面があるために、いくつかの振動形態がありうる。これらを明確にするために、生物制約を排除した

場合に実現可能な最大人口に導く元人口 P^{**} が、

$$(2.8) \quad \theta(P^{**}) = \max_{P>0} Q(P) / \sigma$$

として定義される。もちろん、 $P^* \geq P^{**}$ である。そして人口の自然増加率と生産関数のパラメータの値に依存して起こりうる、3つの場合が識別される。すなわち、

ケースⅠ： P^f , P^* , および P^m のすべてが生存維持局面に存在する。

ケースⅡ： P^f は生物的局面に存在し、 P^* と P^m は生存維持局面に存在する。

ケースⅢ： P^f , P^* , および P^m は生物的条件によって現れてくるが、 P^m は同時に生存維持局面に存在する。

ケースⅠでは、図12 (b) のように、人口の自然増加率が非常に大きいのでリー=ヨークの条件は

$$(2.9) \quad 0 \leq Q(P^m) / \sigma \leq P^f < P^{**} < P^m = Q(P^{**}) / \sigma$$

となる。ここで $Q(P^f) = \sigma P^{**}$ である。ケースⅡでは、図の(c)のように、 $P^* = P^{**}$, $P^f = P^{**} / (1 + \lambda)$ となる。したがってカオスの十分条件は、

$$(2.10) \quad 0 \leq [(1 + \lambda) / \sigma] Q[Q(P^{**}) / \sigma] \leq P^{**} < Q(P^{**}) / \sigma$$

となる。ケースⅢでは、図の (d) のように、人口の自然増加率はその他の事情が等しければケースⅠおよびⅡよりも小である。したがって人口 P^f , P^* , および $Q(P^m) / \sigma$ は、生物的局面に存在するように強制されるのである。そこで、 $P^* > P^{**}$, および $P^m = (1 + \lambda) P^* = f(P^*) / \sigma$ となる。これらのことと (2.7), および $P^f = P^* / (1 + \lambda)$ とから、ケースⅢでは人口のオーバーシュートが起これと、カオスの十分条件は

$$(2.11) \quad 0 \leq Q(P^m) / P^m \leq \sigma / (1 + \lambda)^2$$

となる。これが示していることは、可能な最大人口のもとでの1人当たりの生産量はプラスであるが、1人当たりの生存維持水準 σ の $(1 + \lambda)^2$ 分の1以下であり、もしそのような事態になればカオス状態になる、とい

うことである。

ここで以上のモデルのシミュレーションを行うために、生産関数 (2.1) が

$$(2.1a) \quad Q(P) = AP^\beta(1-P)^\gamma$$

として特定化される。 AP^β は通常生産関数と同じであるが、 $(1-P)^\gamma$ は人口の生産性に対する抑圧効果を考慮するための工夫である。(いうまでもなく、 $\beta=\gamma=1$ であれば上式は簡単なカオス方程式(*1)と同形式になる。)すると人口決定関数(2.4)は、

$$(2.4a) \quad P_{t+1} = \theta(P_t) = \min[(1+\lambda)P_t, AP_t^\beta(1-P_t)^\gamma/\sigma]$$

となる。

まず簡単化のために、 $\beta=1$ とされ、 γ はきわめて小さいとされる。これは、 P が大きく(例えば1に近く)なるまでは生産性への抑圧効果が作用しないことを意味している。自然成長率の制約がなければ、(2.4a)の最大値は

$$(2.12) \quad P^m = [(A/\sigma)/(1+\gamma)^\beta]/[\gamma/(1+\gamma)]^\gamma$$

となるが、これは

$$(2.13) \quad P^{**} = 1/(1+\gamma)$$

のもとで達成される。したがって γ が小さいほど人口のオーバーシュートは大きくなり、 P^{**} を超えるや現れる人口の減少は急激なものとなる。

ここでケースIIIが起こると想定すると、カオスの十分条件は

$$(2.14) \quad A \left[(1+\lambda) \left(\frac{(1-\lambda)}{A} \right)^{1/\gamma} - \lambda \right]^\gamma \leq \frac{\sigma}{(1+\lambda)^2}$$

となる。Day(p.208, Fig.2)はこの条件を満たすパラメータの値、 $\sigma=\beta=1$ 、 $\gamma=0.25$ 、 $\lambda=0.75\gamma$ 、 $A=(1+\lambda)[(1+\gamma)/\gamma]^\gamma$ 、 $P_0=0.10$ を用いて、(2.4a)によって決定される P_t の時間経路を描いている(図13参照)。見られるように、自然増加率によって制約される生物学的局面の人口増加

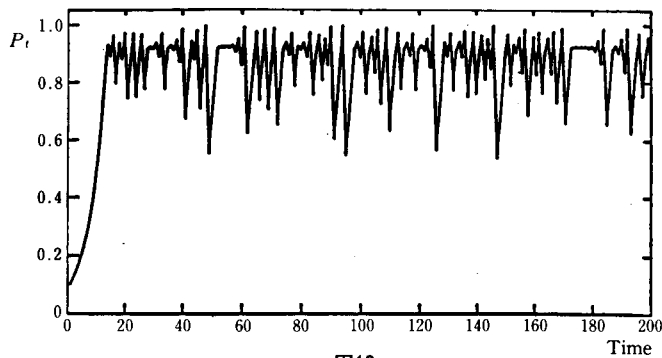


図13

の後に、比較的小さな変動が続くが、やがて大きく変動するようになる。その間に定常状態と思われる期間も現れるが、事態は不規則的なカオスを示している。

3 新古典派の経済成長モデルと不規則循環的成長

いわゆる新古典派成長モデルの出発点となった画期的なSolow (1956)のモデルでは、伸縮的な価格体系、資本と労働の円滑な代替関係による1次同次生産関数、および所得分配の限界生産力理論に基づいて、長期均衡成長経路の安定性が立証された。しかし現実には長期均衡成長経路からの逸脱もあり、その場合には均衡経路への円滑な収束ではなく、循環的変動を通しての収束であろうし、またこの過程で均衡経路自体が影響を受けて変化するかもしれない。その後、Solow (1988)もこの点を重視して、循環的変動と均衡成長との関連を考慮した上での経済変動の分析の必要を示唆している。それにしても、不規則でカオス的と思われる変動を伴いつつ成長していく現実の経済動態は、いかに分析すべきであろうか。

近年、この分野の経済分析にもカオス動学が適用されて、Solow 型の

完全な決定論的成長モデルにおいても、現実にもられるような成長過程が生起しうることが、Day (1982) によって示された。ここでは Day によってカオス動学的に修正された Solow モデルについて考察しよう (なお、Ahmad (1991), pp.775-8 も参照)。

まず総生産 Q は資本 K と労働 L により、生産関数 $Q=F(K, L)$ によって決定される。これは K と L に関して1次同次 (規模に関して収穫不変) であるとされるから、 $Q/K=q$, $K/L=k$ とすれば、 $q=f(k)$ となる。ここで Day は1期間の生産ラグを想定して、

$$(3.1) \quad q_{t+1}=f(k_t)$$

としている。貯蓄率 s は所得、資産、および利子率に依存するが、実質利子率 (ないし利潤率) r は $r=f'(k)$ であるから、結局 k のみに依存することになり、 $s=s(k)$ とされる。したがって1人当たり貯蓄は

$$(3.2) \quad sq_{t+1}=s(k_t) f(k_t)$$

となり、総貯蓄は $s(k_t) f(k_t) L_t$ となる。また、 L は一定率 λ で増加するとされるから、

$$(3.3) \quad L_t=(1+\lambda)^t L_0, \text{ すなわち } L_{t+1}=(1+\lambda) L_t$$

となる。

Day は以上から、Solow の資本蓄積過程に関する基本的な微分方程式、 $\dot{k}=s(k) f(k)-\lambda k$ を、差分方程式の形式に修正して、

$$(3.4) \quad k_{t+1}=s(k_t) f(k_t)/(1+\lambda)$$

としている。(ただし Solow では、 $s(k)=s$ (定数)とされている。)Solow 型のモデルでは、(3.4)において $k_E=k_{t+1}=k_t$ となりうる定常状態が存在し、そのもとで資本蓄積と人口増加の均齊的な均衡成長が可能であるとされた。しかしながら、資本・労働の生産性、貯蓄行動、労働増加率などの差によって、さまざまな形態の循環的成長が起こりうることを、Day は (3.4) にカオス理論を適用して示している。

さて、最大可能な資本・労働比率を k^m として、(3.4)により、 $k^m = s(k^*) f(k^*) / (1+\lambda)$ となりうる k^* ($< k^m$) が存在するものとされる。また、 $s(k) f(k) / (1+\lambda) = k^*$ の最小根が k^f とされる。そしてこの場合のリー＝ヨークの十分条件 (LY1a) の図解式 (LY1a)' として、

$$(3.5) \quad s(k^m) f(k^m) / (1+\lambda) \leq k^f < k^* < k^m$$

が導出された。次に生産関数や貯蓄関数を特定化した例を用いて、 k_t の動向が吟味される。

A：コブ＝ダグラス生産関数と一定貯蓄率

まず生産関数は、Cobb-Douglas型の

$$(3.1a) \quad q_{t+1} = f(k_t) = A k_t^\beta$$

であるとされる。貯蓄率は定数で、

$$(3.2a) \quad s(k_t) = s$$

であるとされ、したがって (3.4) は

$$(3.4a) \quad k_{t+1} = s A k_t^\beta / (1+\lambda)$$

となる。 $0 < \beta$ であれば、右辺は一樣に単調に増加する。したがって、資本・労働比率の定常値 $k_E = [sA / (1+\lambda)]^{1/(1-\beta)}$ のもとでの均斉成長経路に、すべての k_t の軌道は収束する (図2(a)において、勾配は逓減するが反転しない曲線を想定すればよい)。

B：コブ＝ダグラス生産関数と可変的貯蓄率

生産関数は同じく(3.1a)であるが、1人当たり貯蓄は資産 k に比例し、実質利子率 r の上昇とともに増加するものとされる。そして r が低すぎると、貯蓄は資本維持のためには不十分となって資本が消費されると想定される。こうして貯蓄関数は、

$$(3.2b) \quad s(k, r) f(k) = a[1 - (b/r)]k$$

として設定されている。このような想定がなされるのは、カオスの生起を可能ならしめる動学方程式を導出するためである。

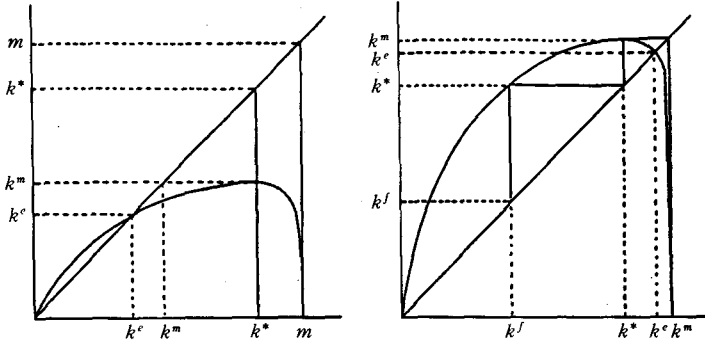


図14

さて、 $f'(k) = \beta f(k)/k$ は r に等しいから、(3.2b)は、

$$(3.2c) \quad s(k) f(k) = a[1 - (b/\beta f(k))k]k$$

となる。以上より、(3.4)に代わる

$$(3.4b) \quad k_{t+1} = [a/(1+\lambda)] k_t [1 - (b/\beta A) k_t^{(1-\beta)}]$$

の差分方程式が導出される。

この式は区域 $[0, (\beta A/b)^{1/(1-\beta)}]$ における図14 (Day(1982), p.410, Fig.3) のような一山型の曲線である。その勾配は

$$dk_{t+1}/dk_t = [a/(1+\lambda)] [1 - (b/\beta A)(2-\beta)k_t^{(1-\beta)}]$$

であり、 k_t の増加につれて逓減する。そして $k_t = k^*$ において k_{t+1} は最大の k^m となる。すなわち $k^m = f(k^*)$ であり、

$$(3.6) \quad k^* = [\beta A/b(2-\beta)]^{1/(1-\beta)}$$

$$(3.7) \quad k^m = [a/(1+\lambda)] [(1-\beta)/(2-\beta)] [\beta A/b(2-\beta)]^{1/(1-\beta)}$$

である。いま生産関数と貯蓄パラメータ b を一定とすれば、 k^* は不変であるが、 k^m は貯蓄係数 a の上昇につれて増加する。

したがってここでも貯蓄パラメータ a が連続的に増加していくにつれて、この曲線は上方に伸張していく。 a が十分に小さければ、図の(a)のように頂点は45°線の下方に存在し、安定な正の均衡点 k^e が存在する。

これはアトラクターであり、 k の初期状態がいかなるものであっても k_t はそれに単調に収束する。 a が増加して頂点が45°線に達すると、単調に収束する安定な均衡点は $k^e=k^m=k^*$ となる。これは1つの分岐点であり、 a がさらに増加すると図の(b)のように頂点は45°線の上側に出て、 $k^* < k^e < k^m$ となり、 k_t は循環しつつ k^e に収束する。 a の増加とともに一連の周期分岐が進行して、カオスの十分条件 (3.5) が満たされると k_t の軌道はカオス状態になる。

C：資本・労働比率上昇への制約

前例では、カオス的な資本蓄積循環を生起させるような、生産技術や貯蓄行動のパラメータの値が存在しうることが示された。ここでは、生産関数と貯蓄関数はまず一般的な (3.1) と (3.2) が想定される。そして労働に対する資本の代替には最大可能な制約率 ρ があるものと想定して、さらに分析が進められる。この場合には (3.4) に代わって、

$$(3.4c) \quad k_{t+1} = \min [(1+\rho) k_t, s(k_t) f(k_t)] / (1+\lambda)$$

によって資本蓄積経路が示される。ここでの $s(k_t)$ は、資本・労働の代替関係に制約がない場合の貯蓄率であり、 $s(k_t) f(k_t) / (1+\lambda)$ は同様に制約がない場合の k_{t+1} を決定する。(なお、Ahmad (1991, pp.376-378)は、(3.4c) に生産関数 (3.1a) と貯蓄関数 (3.2b) を代入した式 (Ahmad, eq (27')) を初めから用いて分析している。)

そしてここでは、(3.4c) の最大値を与える資本・労働比率 k^{**} が、(3.4) を最大化する資本・労働比率と少なくとも同じ大きさになる最も単純な事態について考察される。この場合の k^{**} は、

$$(3.8) \quad (1+\rho) k = s(k) f(k)$$

を満足する最大の k である (解が存在するものとする)。

さて、 $k^m = [(1+\rho) / (1+\lambda)] k^{**}$ であり、また $k^{**} = [(1+\rho) / (1+\lambda)] k^e$ であるから、 $\rho > \lambda$ である限り $k^e < k^{**} < k^m$ が成立する。 $\rho > \lambda$ で

るものとする、カオスの十分条件 (3.5) は

$$(3.5c) \quad 0 \leq s(k^m) f(k^m) / (1+\lambda) \\ \leq [(1+\lambda) / (1+\rho)]^2 k^m = k^f$$

となる。ここで $k^m = [(1+\rho) / (1+\lambda)] k^{**}$ である。

Day はここで、生産関数 (3.1a) と貯蓄関数 (3.2b) を用いて、(3.5c) を

$$(3.5c)' \quad 0 \leq a[A(k^m)^{\beta-1} - (b/\beta)] / (1+\lambda) \\ \leq [(1+\lambda) / (1+\rho)]^2$$

として示している。ここで

$$k^m = \frac{1+\rho}{1+\lambda} \left[\frac{(1+\rho)(1+\lambda)}{aA} + \frac{b}{\beta A} \right]^{1/(\beta-1)}$$

である。

ここで例示されたモデル (3.4c) において、カオス条件 (3.5c)' を満たすパラメータの値、 $\rho=0.4143$, $a=5.25$, $b/A=2$, $\beta=5$, および $k(0)=0.72068$ を用いて算出された、 GNP_t の成長と循環的変動のグラフが掲示されているので (p.407, Figure 1), ここにそれを示しておこう (図15)。見られるように、比較的急速な成長の後に循環的変動が起こり、その後

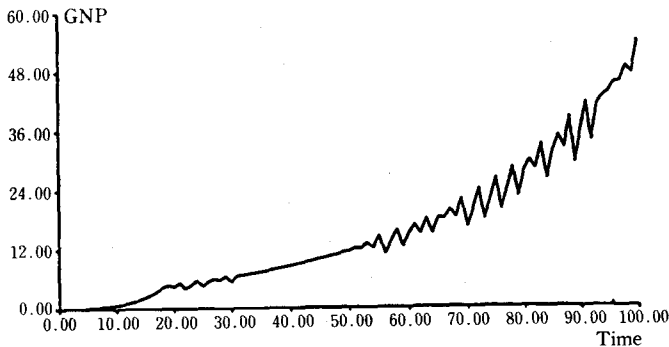


図15

再びかなりの期間（約25期）にわたる円滑な成長期が現れる。そしてまた長期に及ぶ循環的成長の後に、ほぼ恒常的成長に近い状態が現れ始めている。このシミュレーションによって示されているように、将来の動向は、過去の類型——類似した経験と思われる状況——からは予想しえない。見かけ上の構造的変化や予測もしえない出来事は、不規則的衝撃を考慮することなく、確定的な単一方程式モデルによって説明しうるのである。ただし注意すべきことは、このようなカオスの軌道は非常に不安定であり、パラメータや初期条件の僅かな推計誤差や、利用するコンピュータの差によっても、得られる結果が大きな影響を受けることである。誤差は誤差を生み、急速に大きくなっていくから、短期の予測よりも長期の予測の方が困難になるのである。

4 ケインズ派の貨幣的生産経済モデル

ここでは J.M. Keynes の『一般理論』以来の貨幣的生産経済モデルの枠内で、誘発投資および消費のラグと不変価格（不完全雇用下での）を前提とする決定論的マクロ・モデルから、いかにカオスの状況が現れてくるかを示す、Day & Shafer (1985) の分析を考察する。

まず貨幣的部門が考えられ、 Y を不変価格表示の国民所得、 r を利子率、 M を貨幣供給（パラメータ）として、貨幣需要は $D^m(r, Y)$ により、貨幣供給は $S^m(r, Y; M)$ により、そして貨幣の需給均衡は $D^m(r, Y) = S^m(r, Y; M)$ によって示される。この最後の式によって周知の LM 曲線が定義され、貨幣市場均衡をもたらす利子率を Y と M の関数として示す

$$(4.1) \quad r = L(Y; M)$$

が与えられる。

実物的部門は、消費関数 $C = C(r, Y)$ と誘発投資関数 $I = I(r, Y)$

によって構成され、また自生的な投資と消費はパラメータ A によって示される。消費関数と誘発投資関数のそれぞれに (4.1) を代入して、消費・所得 (CY) 関数として

$$(4.2) \quad G(Y; M) = C[L(Y; M), Y]$$

が、投資・所得 (IY) 関数として

$$(4.3) \quad H(Y; M) = I[L(Y; M), Y]$$

が得られる。以下の分析では、通例の $IS-LM$ 関数に代えて、これらの 2 式が基本的な要素として用いられることになる。(想起すべきことは、貨幣的市場の均衡を示す LM 関数は (4.2) および (4.3) を得るために用いられていることである。)

さて、経常消費と誘発投資はラグを伴って国民所得に依存するものとされ、総需要関数 θ が

$$(4.4) \quad Y_{t+1} = \theta(Y_t; \mu, M, A) \\ = G(Y_t; M) + \mu H(Y_t; M) + A$$

として構成される。ここで、 $\mu \geq 0$ は誘発投資の強度を示すパラメータであるとされる。この差分方程式の $\theta(\cdot)$ は区間 $J = [0, Y^u]$ 上で連続で閉じているが、これが Y_t の非循環的なカオス的な変動を生み出しうるための十分条件 (リー＝ヨーク定理) は、(LY1a) あるいは (LY1b) より、

$$(4.5a) \quad \theta^3(Y') \leq Y' < \theta(Y') < \theta^2(Y') ; \text{あるいは}$$

$$(4.5b) \quad \theta^3(Y') \geq Y' > \theta(Y') > \theta^2(Y')$$

を満足する Y' が存在することである。

仮定と命題：

リー＝ヨークの定理 (4.5) を適用しうるように、ここで CY 関数と IY 関数について、まず厳密な仮定がおかれ、続く分析の結果が命題として与えられる (pp.342-5)。

仮定 1：消費 $G(Y)$ は国民所得の連続的で上方傾斜の関数であり、線型

消費関数 cY ($0 < c < 1$) によって下側から、 Y によって上側から境界づけられている。また $G(0) = 0$ である。

この仮定 1 は、 $C(r, Y)$ が例えば通例の線型の cY であれば満たされる。また、通常考えられている種類の投資関数を網羅しうるように、2 つのケースに区分されて仮定がなされる。

仮定 2.1: 誘発投資 $H(Y)$ は Y の非負の連続的な非増加関数で、 Y が $H(Y^d) = 0$ と定義される臨界値 Y^d に近づくにつれて、最終的にはゼロに近づくかゼロになる。

仮定 2.2: 誘発投資 $H(Y)$ は Y の非負で連続的に増加してから減少する関数で、 Y が $H(Y^d) = 0$ と定義される臨界値 Y^d に近づくにつれて、ゼロに近づくかゼロになる。

第 1 のケースは、投資に対する正の直接的な所得効果が存在しないか、そのような効果が貨幣市場の均衡化とともに上昇する利子率の抑圧効果によって圧倒される場合である。第 2 のケースは、初めは投資に対する強力で直接的な所得効果が存在するが、増加していく所得のもたらす利子率効果によって結局それも圧倒される場合である。

まず仮定 1 と仮定 2.1 のもとでの分析がなされる。 $\mu = 0$ であると誘発投資は行われず、 $\theta(Y^d) < Y^d$ であれば単一の安定な定常値が存在し、自生的消費ないし投資 $A > 0$ であればそれは正である。そして Y^d は労働の完全雇用もしくは資本の完全能力利用のもとでの所得のいずれか小さな方になる。 μ が正ではあるが小であれば、総需要はやや変動するが事態はあまり変わらない。 μ が十分に大になると、誘発投資が重要になる。 μ が大きくなるにつれて、誘発投資は Y が Y^d に近づくとともにますます急速に減少するようになる。したがって総需要の動向は図 16 (Day & Shafer, p.344, Fig.16.1) にみられるように、 μ の大きさに依存して変化する。すなわちそれは、 μ の増大につれて「釣り針型」(図 16 の (a)) か、

「引き延ばされたZ型」(図の (b) と (c)) になる。いずれの場合も Y^* に対して局所的最小の Y^{\min} となり、後の場合は Y^{**} に対して局所的最大の Y^{\max} が達成される。

まず最初の「釣り針型」の場合が検討される。1 個の定常値 Y^e (45°線との交点) が存在するが、これには2つのケースがある。(i) 安定で、 $Y^* \leq Y^e$ であるか、(ii) $Y^* > Y^e$ で、 μ が十分大きく

$$(4.6) \quad \theta(Y^{\min}) \geq \max \theta^{-1}(Y^*)$$

となるか、である。 $\max \theta^{-1}(Y^*) = Y^f$ とすると、

$$(4.7) \quad \theta(Y^{\min}) \geq Y^f > Y^* > Y^{\min}$$

となる。 $Y^* = \theta(Y^f)$, $Y^{\min} = \theta(Y^*) = \theta^2(Y^f)$, および $\theta(Y^{\min}) = \theta^3(Y^f)$ であるから、 $\theta(Y^{\min}) < Y^u$ となりうる μ が存在すればカオスの十分条件 (4.5b) が満たされることになる。

ついで「引き延ばされたZ型」の場合の検討がなされる。この場合にも1つの定常値 Y^e が存在する。 $Y^* > Y^e$ であれば、 μ が十分大きくて (4.6) が成立するか、あるいは

$$(4.8) \quad \theta(Y^{\max}) \leq \min \theta^{-1}(Y^{**})$$

となる。 $\min \theta^{-1}(Y^{**}) = Y^f$ とすると、

$$(4.9) \quad \theta(Y^{\max}) \leq Y^f < Y^{**} < Y^{\max}$$

となる。 $Y^{**} = \theta(Y^f)$, $Y^{\max} = \theta(Y^{**}) = \theta^2(Y^f)$, および $\theta(Y^{\max}) = \theta^3(Y^f)$ であるから、(4.8) もしくは (4.9) を成立させうる μ の中に $Y^{\max} < Y^u$ ならしめるものがあれば、カオスの十分条件 (4.5a) を満たすことになる。なお、注意すべきことは、 Y^e , Y^* , Y^{\min} , Y^{**} , Y^{\max} はすべて μ に依存することである。

以上を要約した次の命題が与えられる。

命題1: 仮定1および仮定2.1のもとで、 $Y^*(\mu) > Y^e(\mu)$ を成立させる十分大きな μ が存在するものとする。すると (4.5a) もしくは (4.5b) を

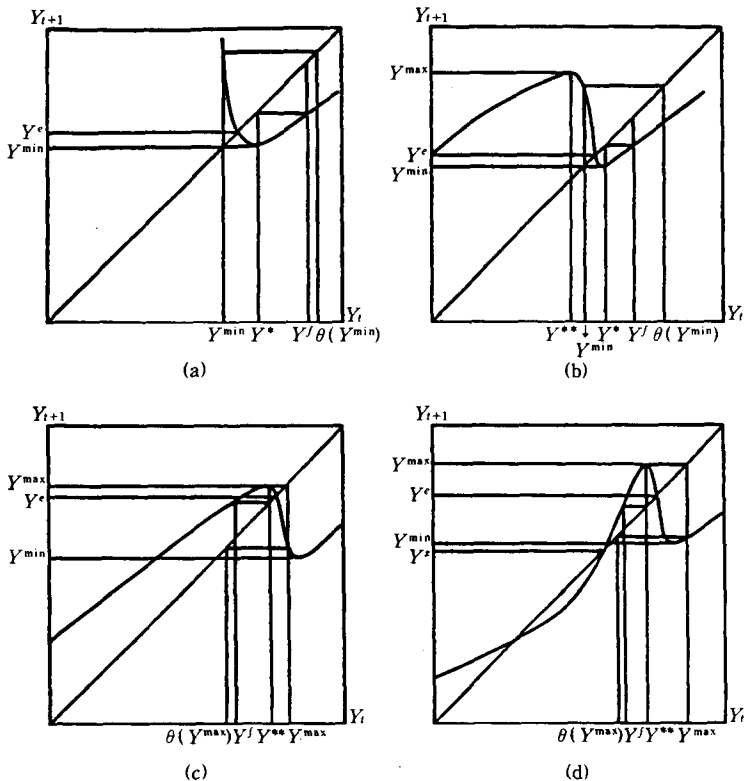


図16

満足する Y' が存在する。もし後者の Y' と $\theta(Y^{\min}) < Y^u$ が成立するか、前者の Y' と $Y^{\max} < Y^u$ が成立すれば、総所得、投資、消費、貯蓄、雇用、および利率の動学的軌道はカオスになる。

ついで仮定1と仮定2.2のもとで、さらに一般的な場合の分析がなされる。すなわち誘発投資は所得の増加によって促進されるが、それも貨幣的効果（利率の上昇）によって結局「クラウド・アウト」されてしまう場合である。ここでは μ が十分に大で「引き延ばされたZ型」の場合になる。図の (b) と (c) のような事態に加えて、(d) のように3つの交

点が現れる事態もありうる。 Y の最小の定常点は安定であるが、 μ が十分に大であれば他の2つは不安定になる。この状況のもとでは、中間の定常値 Y^z を初期値が越える場合にのみ変動が起こりうるが、それが持続するのは $Y^z < Y^{\min}$ となる場合に限られる。注意すべき点は、 $Y^{\min}(\mu') > Y^z(\mu')$ ならしめるような μ' が存在するならば、すべての $\mu > \mu'$ に対して $Y^{\min}(\mu) > Y^z(\mu')$ となることである。こうして次の命題が与えられる。

命題2：仮定1および仮定2.2に加えて、 μ が十分大きくて Y^* が存在し、 $Y^*(\mu) > Y^e(\mu)$ となりうる μ が存在すると仮定する。もし単一の定常状態があるならば命題1が妥当する。もし3つの定常状態があり、 $Y^*(\mu) > Y^e(\mu)$ および $Y^{\min}(\mu') > Y^z(\mu')$ となりうる μ および μ' が存在するならば、(4.5a)もしくは(4.5b)を満足する Y^f が存在する。もし $Y^{\max}(\mu) < Y^u$ であれば、総所得、消費、雇用、および利子の動向はカオスとなる。

これまでの一般的なモデルを特定化して例証するために、次に純粋なKeynesianモデルおよびKaldor型投資関数を採用するモデルとカオスの関連が分析される(pp.345-8)。ここでそれを考察しよう。

A：純粋ケインズ派モデル

ここでは一般的な総需要関数(4.4)の要素、消費関数(4.2)と投資関数(4.3)が特定化されるが、そのためにまず貨幣経済面のLM曲線が設定される。貨幣に対する取引(および予備的)需要は、貨幣の取引速度を k とすれば、 $M_1 = kY$ となる。また投機的動機による貨幣需要は、流動性選好関数、 $M_2 = L(r)$, $r \geq r^* \geq 0$ 、によって決定されるが、これは一様に下降し、 $r \geq r^*$ について逆関数 $r = L^{-1}(M_2)$ が成立する。いうまでもなく、流動性の罫は、 r が低下して r^* に近づくにつれて $L(r)$ が無限大になること、すなわち M_2 がゼロに近づくにつれて $L^{-1}(M_2)$ が無限大

になることを意味している。こうして LM 曲線の方程式は、

$$(4.1a) \quad r = L^{-1}(M - kY), \quad 0 \leq Y \leq M/k$$

と変形される。これは Y の一様な増加関数であり、 Y が M/k に近づくにつれて取引(および予備的)需要 M_1 が増加して、 r は限りなく上昇していく。したがって $Y^d = M/k$ によって Y の上限が設定される。

消費関数は

$$(4.2a) \quad G(Y) = cY, \quad 0 < c < 1$$

とされる。また誘発投資は Y には直接依存せず、 r のみの減少関数 $I = I(r)$ であるとされ、投資関数は (4.1a) を代入して

$$(4.3a) \quad H(Y) = I[L^{-1}(M - kY)]$$

によって与えられる。

このモデルでは仮定 1 と仮定 2.1 が成立するから、 M/k が十分に大きければ命題 1 が妥当し、カオスが発生しうる。

B: カルダール型投資関数モデル

ここでは投資関数として Kaldor 型のものが用いられるが、流動性選好関数も特定化されて、 $M_2 = \nu / (r - r^*)$, $r \geq r^*$ とされる。したがって LM 曲線の方程式は

$$(4.1b) \quad r = r^* + \nu / (M - kY), \quad Y \leq M/k$$

となる。消費関数は前と同じであるが、投資関数については、 r のみに依存するのではなく、低水準の Y は誘発投資を抑制し、高水準の Y はそれを刺激するような形のものとされ、

$$I(r, Y) = \begin{cases} 0, & r'' < r \\ Y^\alpha (r'' - r)^\alpha, & 0 < r < r'' \end{cases}$$

として設定される。これに (4.1b) を代入して、

(4.3b) $H(Y) =$

$$\begin{cases} r^a \left[\frac{I(r'' - r^*)(M - kY) - v}{M - kY} \right]^d, & 0 \leq Y \leq M/k = \frac{v}{k(r'' - r^*)} \\ 0, & M/k - \frac{v}{k(r'' - r^*)} \leq Y \end{cases}$$

とされる。

このモデルでは、仮定1と仮定2.2が成立するから命題2が妥当し、カオスが発生しうる。カオス条件を満たす数値例によって描かれたグラフがあるので掲載しておこう。図17 (p.348, Fig. 16.2)の(a)には誘発投

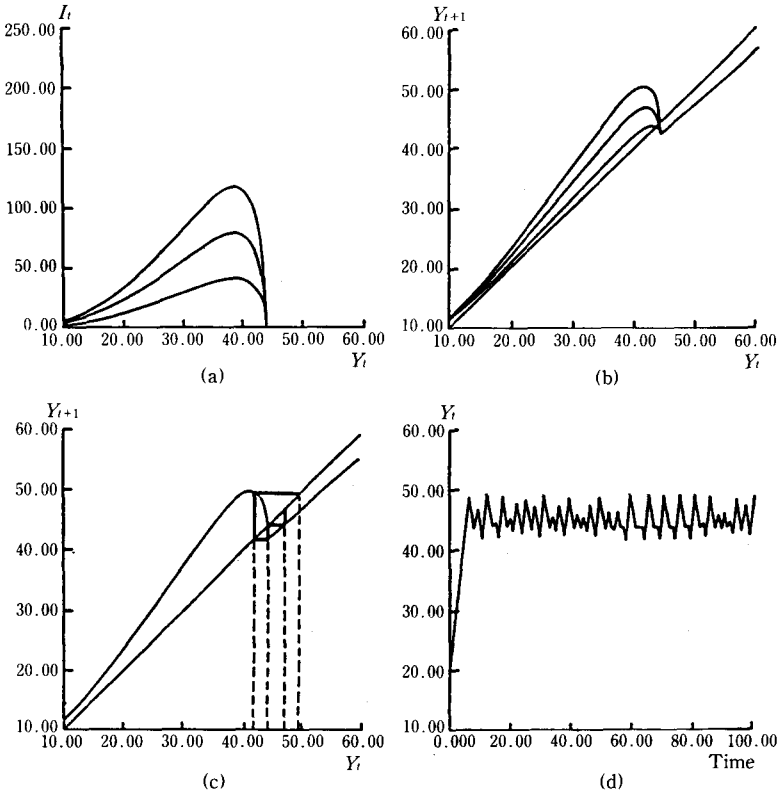


図17

資の強度パラメータ μ の値に応じる3本の投資関数 μH が、(b)にはそれらに消費関数を加えた、対応する総需要曲線が示されている。そして(c)には μ が十分に大きくて命題2が成立する場合の総需要曲線が描かれ、(d)にはそのカオス軌道の1例が示されている。この軌道は結局4周期循環に落ち着くかのように見える。しかしその循環を5回繰り返してから、それから離れることが分かる。既述(Iの5)のように、カオス軌道はなんらかの周期の循環に近い動向をしばらく示してから離れ、また他の周期の循環に近づいては離れることをランダムな仕方で無限に繰り返していくのである。

III 結論的覚書

以上において考察してきた諸モデルについて例示されたカオス軌道(図13, 図15, 図17(d))は、特定の値のパラメータと変数の初期値について、特定のコンピュータによって描き出されたものであった。これらの条件のいずれが僅かに変わっても、描き出される軌道は敏感に反応して変化する。したがって、かりに現実の経済行動や構造を動学モデルによって精確に表しえたとしても、コンピュータによって描き出される軌道は「真の軌道」を示すことにはならないのである。しかしそれでもなお、実際に観察されるような高度に不規則で予測し難いカオス的変動が、経済行動や構造が不変のもとで、外生的な衝撃もないのに、生起しうることを明らかにすることができるという利点はある。

しかし想起すべき点は、カオスが生起しうるのは特定の条件のもとであることである。まずは問題の非線型差分方程式が一山型の曲線になることであるが、考察した諸モデルから明らかなように、そのためには仮定や工夫が必要とされる。それからリー＝ヨークの条件が満たされるこ

とである。とはいえ、これらの条件は、一般的にはより緩やかなものになる。すなわちリー＝ヨークの条件は(*1)については $\omega > 3.8\cdots$ となることを必要とするが、実際にはその条件が満たされなくても、 ω が3.57を超えるとカオスが生起することはすでに考察した。(想起されるように、リー＝ヨークの条件は十分条件であって必要条件ではない。)さらに、カオスの生起は1階の非線型定差方程式に限られず、より高階の定差方程式あるいは連立定差方程式体系において、より緩い条件のもとで可能である (Ahmad (1991), p.379; Baumol and Benhabib (1989), Dana and Malgrange (1984) 参照)。そしてまた非線型微分方程式によってもカオスは生起しうる (Day (1982), p.413; また分析については、例えば Tu (1992), Chap. 10 参照。また、カオスや他の重要な諸問題も含めた、非線型微分方程式系に関する包括的な考察には、大和瀬 (1987) 参照)。したがってカオス発生装置としての経済動学モデルの構築とそれによる経済動態の分析の可能性には、幅広いものがあるといえよう。

本論で取り上げて考察した、あるいは指摘した諸モデルは、これまでに提示された代表的な経済動態分析モデルのカオス動学的な再構成であった。カオス理論が経済学の分野に導入され始めた頃には、確かにそのような形の応用研究が多かったようであるが、しかし当初から経済の動態分析のためにカオス動学の適用を試みた諸研究がなかったわけではない。その1例は、「ボウモル氏病モデル」の一環として、諸企業の研究開発とマクロ経済の生産性上昇との相互依存関連をフィードバック・モデルとして構成し、これにカオス動学を適用して分析した Baumol and Wolff (1992) である (これについては、拙稿 (1994) 参照)。またその他の諸例については、例えば Benhabib (ed.) (1992) に収録の諸論文を参照されたい。

さて、分岐分析によって、経済主体の行動ないし経済体系の構造を規

定するパラメータの変化による分岐点の出現と、その点以後の新しい行動や構造のもとでの経済動態が分析される。しかし経済主体の行動や経済体系の構造は一定不変のものではなく、時代とともに変化しうるし、この変化は自生的というよりは、むしろ一定の行動や構造のもとで生起する経済動態によって影響を受けて変化するであろう。すなわち、パラメータはそのもとでの経済動向を決定づけるとともに、この動向の影響を受けて変化し、そしてまた経済動向を決定するというように、両者の間には相互依存の関係があるであろう。ここに、カオス動学の経済動態分析への単なる適用ということに留まらず、カオス動学と経済動態分析の結節点が見い出されるであろう。

筆者は30年以上前に、経済変動過程の中での経済主体、特に企業の投資行動パターンの変化の可能性に着目して、極限循環モデルに投資の長期的成長と不可逆的消费関数を結び付けた Kaldor 型循環的成長モデルと、長期均衡への循環的収束を示す Kalecki 型モデルを結合し、もって現実にみられるような経済動態を説明しようと試みたことがある。その後この着想は、2つの型の経済成長率循環——一方は極限循環型で、他方は減衰循環型——を、やはり経済変動過程での経済主体の行動パターンの変化を通して結合しようとする試みに発展した（拙稿（1978）および（1992））。今後に残された課題は、これらの経済動態分析モデルを、できればカオス動学的に再構成して分析を試みることである。

参考文献

- Ahmad, S. (1991); "Theory of Chaos and Economic Fluctuations," in *Capital in Economic Theory: Neo-classical, Cambridge and Chaos*, Edward Elgar Publishing, Ltd.
- Baumol, W.J. (1970): *Economic Dynamics*, 3rd edition, The Macmillan Co.
- , and J.Benhabib (1989): "Chaos: Significance, Mechanism and Economic Applications," *Journal of Economic Perspectives*.
- , and R.E. Quandt (1985): "Chaos Models and their Implications for

- Forecasting," *Eastern Economic Journal*, Jan.-Mar.
- , and E.N. Wolff (1992): "Feedback Between R&D and Productivity Growth: A Chaos Model," in: Benhabib (ed.) (1992).
- Benhabib, J. (ed.) (1992): *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium*, Princeton Univ. Press.
- , and R.H. Day (1981): "Rational Choice and Erratic Behavior," *Review of Economic Studies*.
- Creedy, J. and Martin, V.L. (eds.) (1994): *Chaos and Non-linear Models in Economics: Theory and Applications*, Edward Elgar.
- Creedy, J. and Martin, V.L. (1994): "The Strange Attraction of Chaos in Economics," in Creedy, J. and Martin, V.L. (eds.) (1994).
- Day, R. (1982): "Irregular Cycles," *American Economic Review*, June.
- (1983): "The Emergence of Chaos from Classical Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics*, May.
- , and W. Shafer (1985): "Keynesian Chaos," *Journal of Macroeconomics*; rep. in Benhabib (ed.) (1992).
- Dana, R. and Malgrange, P. (1984): "The Dynamics of a Discrete Version of a Growth Cycle Model," in Anct, J. (ed.): *Analysing the Structure of Econometric Models*, M. Nijhoff Publishing Co.
- Feigenbaum, M.J. (1983): "Universal Behavior in Nonlinear Systems," *Physica* 7D.
- Frisch, R. (1933): "Propagation and Impulse Problems in Dynamic Economics," *Essays in Honor of Gustav Cassel*.
- Goodwin, R.M. (1990): *Chaotic Economic Dynamics*, Oxford Univ. Press (有賀祐二訳(1992)『カオス経済動学』多賀出版).
- Grandmont, J.M. (1985): "On Endogeneous Competitive Business Cycles," *Econometrica*, Sept., rep. in Benhabib (ed.) (1992).
- Hicks, J.R. (1950): *A Contribution to the Theory of the Trade Cycle*, Oxford Univ. Press (古谷弘訳(1951)『景気循環論』岩波書店).
- Homes, C.H. (1991): *Chaotic Dynamics in Economic Models: Some Simple Case-Studies*, Wolters-Noordhoff.
- Kaldor, N. (1940): "A Model of the Trade Cycle," *Economic Journal*; rep. in *Essays on Economic Stability and Growth*, 1960.
- Kalecki, M. (1937): "A Theory of the Business Cycle," *Review of Economic Studies*; rep. in *Essays in the Theory of Economic Fluctuations*, 1939.
- Lanford, O. (1982): "A Computer-Assisted Proof of the Feigenbaum Conjectures," *Bulletin of The American Mathematical Society* 6.

- Li, T. and Yorke, J. (1975): "Period Three Implies Chaos," *American Mathematical Monthly*, Dec.
- May, R.M. (1974): "Biological Population with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos," *Science*, CLXXXVI (645-7).
- : (1976): "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics," *Nature*, June 10.
- , and J.R. Beddington (1975): "Nonlinear Difference Equations: Stable Points, Stable Cycles, Chaos," unpublished manuscript.
- Medio, A. (1992): *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*, Cambridge Univ. Press.
- Peters, E.E. (1991): *Chaos and Order in the Capital Markets; A New View of Cycles, Prices and Market Volatility*, John Wiley (新田 功訳 (1994) 『カオスと資本市場』 白桃書房).
- Puu, T. (1993): *Nonlinear Economic Dynamics*, Third Revised and Enlarged Edition (1st ed., 1989), Springer-Verlag.
- Samuelson, P.M. (1939): "Interactions between the Acceleration and the Multiplier," *Rev. of Econ. and Stat.*
- (1939): "A Synthesis of the Principles of Acceleration and Multiplier," *Jour. of Pol. Econ.*
- (1947): *Foundations of Economic Analysis*, Harvard Univ. Press.
- Scheinkman, J.A. (1990): "Nonlinearities in Economic Dynamics," *Economic Journal*.
- Solow, R.M. (1956): "A Contribution to the Theory of Economic Growth," *Q. J.E.*, Feb.
- (1988): "Growth Theory and After," *A.E.R.*, June.
- Tu, P.N.V. (1994): *Dynamical Systems: An Introduction with Applications in Economics and Biology* (2nd Revised and Enlarged Edition, 1st edition: 1992), Springer-Verlag.
- 長島弘幸・馬場良和(1992): 『カオス入門——現象の解析と数理——』 培風館。
- 大和瀬達二 (1987): 『経済学におけるダイナミカルシステムの理論』 税務経理協会。
- 竹山協三 (1991): 『カオス——自然の乱れ方——』 (ポピュラー。サイエンス) 裳華房。
- 山口昌哉 (1986): 『カオスとフラクタル——非線形の不思議——』 (ブルーバックス) 講談社。
- 小野俊夫 (1978): 「現代企業社会と巨視的動学」 早稲田社会科学研究所, 第18号。
- (1992): 「現代寡占経済の成長と循環」 『伊達邦春教授古稀希記念論文

集』 八千代出版.

—— (1994) : 「研究開発・知識生産活動と生産性：不均斉発展——ボウモル氏病——カオス」 早稲田社会科学研究, 第48号。